DS3 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 d'après **EDHEC** 2010 Problème.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

Partie 1 : Étude de f.

1. **a.** Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

b. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

c. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire une valeur propre de M ainsi que le sous-espace propre associé.

d. Déterminer les autres valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.

e. En déduire que M est diagonalisable.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

b. Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.

d. Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

3. Reconnaître la loi de X_1.

4. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

On rappelle que `rd.randint(1,n+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```python
k = int(input('Entrez un nombre k superieur a 2 : ')
X = rd.randint(1,4)
for i in range(k-1):
    tirage = rd.randint(1,4)
    if X == 1:
      X = ....
      else:
        if tirage != X:
          X = ....
print(X)
```

5. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\mathbb{P}\big([X_k = i]\big)$.

a. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[X_k=j]}\big([X_{k+1} = i]\big)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b. On admet que $([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3])$ est un système complet d'évènements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

c. Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$.

d. Vérifier : $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j.$$

e. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_k = 1]\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big([X_k = 2]\big) = \mathbb{P}\big([X_k = 3]\big) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

f. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

g. Écrire une fonction Python, notée esp, qui renvoie $\mathbb{E}(X_k)$ à l'appel de esp(k).

Exercice 2 **EML** 2024 Exercice 3.

Soit N un entier supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule au k-ième tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1, N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéro distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéro distincts lors des k premier tirages, mais seulement $i - 1$ numéros distincts lors des $k - 1$ premiers tirages.

Exemple : On suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.

2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction "ajout" qui prend en argument une liste L et un entier x.

```
def ajout(L,x) :
  if (x in L ) == False :
    L.append(x)
```

Expliquer succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande ajout(L,x) modifie la liste L.

3. Recopier et compléter la fonction Simul_T ci-dessous. cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons

- L la liste sans répétition des numéros sorties lors des tirages effectués ;
- k le rang du tirage en cours ;
- x le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
  L = []
  k = 0
  while ..... :
    x = rd.randint(1,N+1)
    ajout(L,x)
    k = ......
  return(......)
```

4. On suppose $N = 3$.
Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de Simul_T(3,2). Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules. Dans cette partie, on suppose $N = 3$. Ainsi, l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.

6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.

a. Décrire l'événement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des événements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.

b. En déduire $\mathbb{P}((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$.

7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.

8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général. On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.

Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}.$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, \cdots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

a. Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-i+1}{N}$.

b. Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et de N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.

10. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \cdots, Z_i$.

Loi de T_3.

11. **a.** Calculer $\mathbb{P}((Z_2 = l) \cap (Z_3 = k))$ pour tous l et k dans $\mathbb{N}^*$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right).$$

c. Déterminer la loi de T_3.

Espérance et covariance.

12. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Montrer que $E(T_i) = N \sum\limits_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.

13. Soit i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$. Montrer que

$$\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = V(T_i),$$

où $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

Exercice 3

On considère deux réels a et b, ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

1. **a.** Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

b. En déduire par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b. Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?

c. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis écrire la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

d. Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

3. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a. Établir l'égalité :

$$\mathbb{P}([X = Y]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\,\mathbb{P}([Y = n]).$$

b. En déduire explicitement $\mathbb{P}([X = Y])$.

4. Soit $A(X, Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité p pour que la matrice ne soit pas diagonalisable.

On considère le script Python suivant

a.

```
m = int(input('entrez une valeur entiere pour m :'))
c = 0
for k in range(m) :
  X = rd.geometric(1/2)
  Y = rd.geometric(1/2)
  if X == Y:
    c = c+1
i = 1 -c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?